UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2011

GARA di SECONDO LIVELLO

10 febbraio 2011

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI, LIBRI DI TESTO E TAVOLE NUMERICHE. È proibito comunicare con altri concorrenti o con l'esterno; IN PARTICOLARE, È VIETATO L'USO DI TELEFONI CELLULARI.
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 12 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi 13 e 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare le soluzioni in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tali problemi verranno valutati con un punteggio **da 0 a 10**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente:

Nome:__________ Cognome:__________

Indirizzo:__________ Città:__________

Scuola:__________ Anno di corso:_____ Città:__________

e–mail:__________ Taglia per eventuale maglietta: S M L XL

Codice fiscale:__________ Nazionalità:__________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–14)		$\times 5 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.dm.unibo.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Gabriele, l'amante dei cubi, ha comprato un magnifico pezzo da collezione: un cubo interamente composto di cioccolato, avente gli spigoli lunghi 10 cm. Purtroppo, avendo perso una scommessa con due suoi amici, dovrà cedere due terzi del volume del blocco di cioccolato. Gabriele ha deciso di prendere come propria porzione di cioccolato un cubo più piccolo, avente uno dei suoi vertici coincidente con uno dei vertici del cubo di cioccolato comprato e le facce parallele a quelle del cubo comprato. Alla fine, cede ai due amici il cioccolato rimasto. Indichiamo con S la superficie totale del blocco di cioccolato ceduto, espressa in cm^2. Allora si ha...

   (A) $300 \leq S \leq 350$ **(B)** $350 < S \leq 450$ **(C)** $450 < S \leq 550$ **(D)** $550 < S \leq 650$ **(E)** $650 < S \leq 750$.

2. Nel bosco dell'albero viola ci sono tre tipi di animali in grado di parlare: volpi, serpenti e tartarughe. Le prime mentono solo i giorni di pioggia, i secondi mentono sempre, le terze dicono sempre la verità. Un giorno l'esploratore Berny parla con quattro animali. Le loro affermazioni, riportate nell'ordine in cui sono state dette, sono:
   A: "Oggi piove."
   B: "L'animale che ha parlato prima di me mente."
   C: "Oggi è sereno."
   D: "Quello che ha parlato prima di me mente o io sono una volpe."
   Con quante tartarughe al massimo ha parlato Berny?

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** Non è possibile determinarlo.

3. Giulio scrive un polinomio $P_1(x)$ e un altro polinomio $P_2(x)$, prodotto di fattori di primo grado, avente grado strettamente maggiore del precedente. Eseguendo la divisione di $P_2(x)$ per $P_1(x)$, si ottiene resto 0. Indicando con $Q(x)$ il quoziente di tale divisione, quale delle seguenti affermazioni è sempre vera?

   (A) $Q(x)$ può essere una costante
   (B) Se $P_2(a) = 0$, allora $Q(a) = 0$
   (C) Esiste un numero reale a tale che $P_2(a) = Q(a) = 0$
   (D) $Q(x)$ ha certamente grado minore di $P_1(x)$
   (E) Se $P_1(a) = 0$, allora $Q(a) = 0$.

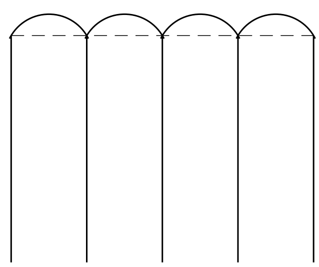
4. Quanti sono i numeri primi che possono essere espressi nella forma $n^{n+1} + 1$, con n intero positivo?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma in numero finito **(E)** infiniti.

5. Ad una fiera c'è un gioco molto invitante, perché si può partecipare gratis; chi vince guadagna un premio. Il premio pattuito per le prime quattro partite è una moneta, per la quinta è di due monete. Nicola ad ogni partita ha probabilità $\frac{2}{3}$ di vincere il premio e decide di giocare 5 partite. Qual è la probabilità che Nicola vinca almeno 4 monete?

   (A) $5\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **(B)** $4\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **(C)** $3\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **(D)** $2\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **(E)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

6. Un fabbro sta costruendo una cancellata orizzontale in ferro formata da tante barre verticali, parallele tra loro, ciascuna delle quali è posizionata a 18 cm di distanza dalle 2 vicine. Il fabbro collega le estremità di ciascuna coppia di sbarre contigue con una barra incurvata ad arco di circonferenza collocata nel piano delle sbarre, il cui punto più alto dista $3\sqrt{3}$ cm dalla retta (tratteggiata in figura) che passa per le estremità superiori di tutte le sbarre, e che è perpendicolare alle sbarre stesse. Quanto è lunga ciascuna delle barrette utilizzate per costruire gli archi?

   (A) $8\pi(\sqrt{3} - 1)$ cm **(B)** $6\pi\sqrt{3}$ cm **(C)** $12\pi(\sqrt{3} - 1)$ cm **(D)** $4\pi\sqrt{3}$ cm **(E)** $8\pi\sqrt{3}$ cm.

7. Quante sono le soluzioni reali distinte dell'equazione $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$?

   (A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4 **(E)** 6.

8. Quanti sono i numeri interi positivi di 10 cifre $abcdefghij$, con tutte le cifre diverse e che verificano le condizioni $a + j = b + i = c + h = d + g = e + f = 9$?
Nota: un numero non può iniziare con 0.
(A) 3456 **(B)** 3528 **(C)** 3645 **(D)** 3840 **(E)** 5040.

9. Da un punto L partono due strade rettilinee che formano un angolo acuto α. Lungo una delle due strade ci sono due lampioni, posizionati in P e Q, tali che $LP = 40$ m e $LQ = 90$ m. Eva si trova in E sull'altra strada, e vede i due lampioni sotto un angolo $P\widehat{E}Q$. A che distanza da L si trova Eva, se $P\widehat{E}Q$ ha la massima ampiezza possibile?

(A) 40 m **(B)** 60 m **(C)** 65 m **(D)** 90 m **(E)** la distanza dipende da α.

10. Quanto vale la somma delle seste potenze delle soluzioni dell'equazione $x^6 - 16x^4 + 16x^2 - 1 = 0$?

(A) 6375 **(B)** 6482 **(C)** 6515 **(D)** 6660 **(E)** 6662.

11. x e y sono due interi positivi tali che $x^2 - y^2$ è positivo, multiplo di 2011 e ha esattamente 2011 divisori positivi. Quante sono le coppie ordinate (x, y) che verificano tali condizioni?
Nota: 2011 è un numero primo

(A) 2010 **(B)** 2011 **(C)** 1005 **(D)** 0 **(E)** Ne esistono infinite.

12. Sia $x_1 \ \ldots \ x_n$ una sequenza finita di numeri reali tali che:
i) la somma di 7 suoi termini consecutivi sia sempre strettamente positiva;
ii) la somma di 13 suoi elementi consecutivi sia sempre strettamente negativa.
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) La sequenza ha al più 18 termini
(B) La sequenza può avere 19 termini
(C) La sequenza ha esattamente 21 termini
(D) La sequenza ha almeno 18 termini
(E) Esistono sequenze di lunghezza arbitraria che soddisfano i) e ii) .

Problemi a risposta numerica – 5 punti

13. Sia ABC un triangolo equilatero, indichiamo con D, E, F i punti medi dei lati. Quanti triangoli non degeneri e non congruenti fra loro si possono ottenere scegliendo 3 dei punti A, B, C, D, E, F?

14. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di interi relativi che verificano l'equazione
$y^4 - 8y^2 + 7 = 8x^2 - 2x^2y^2 - x^4$?

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Dimostrare che tutte le potenze di 3 hanno la cifra delle decine pari.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia ABC un triangolo acutangolo, e siano D, E i piedi delle altezze uscenti da A, B. Siano A' il punto medio di AD, B' il punto medio di BE. CA' interseca BE in X, CB' interseca AD in Y. Dimostrare che esiste una circonferenza passante per i punti A', B', X, Y.

SOLUZIONE

Nome:____________________ Cognome:____________________

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia n un intero positivo. Un treno ferma in $2n$ stazioni, incluse quella iniziale e finale, numerate in ordine dalla prima alla $2n$-esima. Si sa che in una certa carrozza, per ogni coppia di interi i, j tali che $1 \leq i < j \leq 2n$, è stato prenotato esattamente un posto per il tragitto tra la stazione i-esima e quella j-esima. Ovviamente prenotazioni diverse non possono sovrapporsi. Determinare, in funzione di n, il numero minimo di posti che devono essere disponibili in quella carrozza affinché la situazione descritta sia possibile.

SOLUZIONE (Pagina 1/2)

Nome:____________________ Cognome:____________________

ESERCIZIO DIMOSTRATIVO

SOLUZIONE (Pagina 2/2)

Nome:____________________ Cognome:____________________

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2009

GARA di SECONDO LIVELLO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per gli scorsi anni, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte esatte vanno attribuiti **5 punti**, alle risposte non date (bianche) va attribuito **1 punto**, alle risposte errate vanno attribuiti **0 punti**.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
D	B	C	B	A	D	B	A	B	E	C	A	4	4

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi tre problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 10.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate o non contenenti alcuna idea utile alla soluzione del problema e 10 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 15
Ovviamente si assegnino 10 punti per la soluzione completa, anche con traccia diversa dalle soluzioni proposte. Per soluzioni parziali si seguano queste indicazioni:

- Comprendere che il problema dipende unicamente dalla classe di resto modulo 100: 2 punti
- Comprendere che il problema dipende unicamente dalla classe di resto modulo 20: 3 punti (non cumulabili con i precedenti)
- Provare che le classi di resto (mod 100 o mod 20) formano una successione periodica: 2 punti
- Elencare correttamente tutte le possibili classi di resto (mod 100 o mod 20) o determinare l'ordine dell'elemento 3 nell'opportuno gruppo moltiplicativo: 4 punti se mod 100, 3 punti se mod 20.

Valutazione per la soluzione alternativa:

- Provare che il problema dipende dalla classe di resto modulo 10: 2 punti
- Provare che le classi di resto modulo 10 formano una successione periodica di periodo 4: 2 punti
- Determinare una forma esplicita per il numero 3^k privato della cifra delle unità : 1 punto
- Ricorrere al binomio di Newton, all'induzione o alle classi di resto modulo 4 per concludere: 5 punti

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 16
Come sempre, qualunque dimostrazione completa vale **10 punti**, anche se diversa da quella ufficiale (ad esempio, fatta usando la geometria analitica o la trigonometria); però l'impostazione di calcoli analitici o trigonometrici che non portino alla tesi né a nessuno dei passi intermedi sotto riportati vale **0 punti**.
Per soluzioni parziali si seguano queste indicazioni:

- Provare la similitudine tra i triangoli ADC ed EBC: 2 punti;
- Provare la similitudine tra i triangoli $AA'C$ e $BB'C$, oppure tra i triangoli $CA'D$ e $CB'E$, tramite il punto precedente o meno: 3 punti;
- Provare uguaglianze di angoli utili a dimostrare la ciclicità di $A'XB'Y$: 5 punti;

Soluzioni che non menzionino alcun problema di configurazione vanno valutate su un massimo di **9** punti.

Scala di valutazione per la correzione dell'esercizio 17
Si diano 10 punti, ripartiti in $5 + 5$ secondo le indicazioni sottostanti, a chi dimostra correttamente ed esaustivamente che sono necessari e sufficienti n^2 posti, anche con una soluzione diversa da quella da noi proposta.
La dimostrazione completa del solo fatto che sono necessari n^2 posti vale 5 punti, così ripartiti:

- 1 punto per chi afferma solamente che sono necessari n^2 posti, senza fornire nessun elemento utile alla dimostrazione di questo fatto.

- 1 ulteriore punto per chi nota, anche senza dimostrazione e senza trarne conseguenze utili alla soluzione, che il maggior numero di passeggeri si ha tra la stazione n-esima e la $n + 1$-esima.

- 3 ulteriori punti, per un totale quindi di 5, a chi conclude la dimostrazione della necessità di n^2 posti

La dimostrazione completa del solo fatto che sono sufficienti n^2 posti vale 5 punti, così ripartiti:

- 1 punto per chi afferma solamente che sono sufficienti n^2 posti, senza fornire nessun elemento utile alla dimostrazione di questo fatto.

- 2 ulteriori punti per chi descrive uno schema di assegnazione dei posti, pur senza dimostrarne la validità, adatto per ogni n.

- 2 ulteriori punti, per un totale quindi di 5, per chi dimostra esaustivamente che con lo schema proposto tutti i passeggeri riescono a viaggiare

- Degli ultimi 4 punti, se ne assegni 1 solo allo studente che propone uno schema valido solo per alcuni n affermando però, e solo in caso quest'affermazione sia palesemente vera, che è generalizzabile a tutti gli n.

- Non si assegnino punti a chi nota solamente che i posti necessari sono in numero minore o uguale al totale dei passeggeri che viaggeranno nella carrozza, pari al numero delle coppie di interi distinti scelti tra 1 e $2n$, ossia $2n^2 - n$, senza cercare in alcun modo di migliorare la stima.

Nel caso lo studente abbia dimostrato, o cercato di dimostrare, che non è necessario alcuno schema specifico di assegnazione dei posti, come da soluzione alternativa da noi proposta, si segua il seguente schema per l'assegnazione del punteggio alla seconda parte dell'esercizio.

- 1 punto, come sopra, per chi afferma solamente che sono sufficienti n^2 posti, senza fornire nessun elemento utile alla dimostrazione di questo fatto.

- 1 ulteriore punto per chi afferma che ogni passeggero che entra riesce sempre a trovare un posto, anche senza dimostrarlo.

- 3 ulteriori punti, per un totale quindi di 5, per chi dimostra esaustivamente l'affermazione soprastante.

SOLUZIONI DEI QUESITI

1. La risposta è **(D)**. Il blocco di cioccolato ceduto ha la stessa superficie del cubo originale, pari a $6 \cdot 10^2\ \mathrm{cm}^2$. Infatti, quando si taglia via il cubo più piccolo, 3 delle sue facce sono esattamente uguali ai 3 quadrati che si formano sul blocco di cioccolato ceduto. (R. Morandin)

2. La risposta è **(B)**. Consideriamo le due possibilità: piove oppure non piove. Se piove le volpi e i serpenti mentono, mentre le tartarughe dicono il vero. Allora A, che dice la verità, è necessariamente una tartaruga. B mente, quindi è una volpe o un serpente. Allo stesso modo mente C, che è quindi una volpe o un serpente. D dice la verità, perché C mente, quindi è una tartaruga. Ci sono allora esattamente due tartarughe. Se non piove i serpenti mentono, mentre volpi e tartarughe dicono la verità. Allora A, che mente, è necessariamente un serpente, mentre B dice la verità ed è quindi una volpe o una tartaruga. C dice la verità, quindi è anch'esso una volpe o una tartaruga. Poiché C non ha mentito D può essere una volpe, nel qual caso la frase è vera, oppure un serpente, nel qual caso la frase è falsa. In questo caso ci sono quindi al più due tartarughe.
(F. Cardinale e M. Conciatori)

3. La risposta è **(C)**. P_2 si può scrivere come prodotto di fattori di primo grado, quindi esso sarà del tipo
$$(x-\alpha_1)^{m_1}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}$$
dove $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $P_2(x)=0$. Dato che P_1 divide P_2, se ne deduce che anche P_1 si scrive come prodotto di fattori di primo grado ed in particolare come prodotto degli stessi fattori di P_2 ma con molteplicità minore o uguale, ovvero
$$P_1=(x-\alpha_1)^{n_1}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}$$
con $n_1\le m_1,\dots,n_k\le m_k$. Poiché P_1 ha grado strettamente minore di P_2 , almeno una delle precedenti relazioni deve essere un minore stretto, il che implica che esiste almeno un fattore di primo grado che divide sia P_2 che Q, ovvero che esiste almeno un numero reale a tale che $P_2(a)=Q(a)=0$.
Si poteva giungere ala soluzione anche facendo le seguenti osservazioni:
   - il grado di $P_2(x)$ è strettamente maggiore del grado di $P_1(x)$ ed in particolare è uguale alla somma dei gradi di $P_1(x)$ e di $Q(x)$, quindi $Q(x)$ non può avere grado 0, ovvero non può essere una costante.
   - I polinomi $P_2(x)=(x-1)^3$ e $P_1(x)=(x-1)$ permettono di escludere le risposte **(D)**ed **(E)**.
   - La risposta **(B)** si esclude scegliendo $P_2(x)=(x-1)^3(x+1)$ e $P_1(x)=(x-1)(x-1)$.

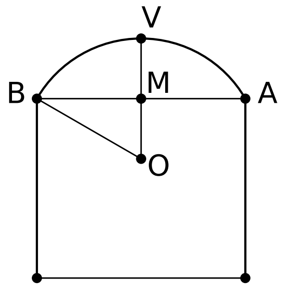
(Di Trani)

4. La risposta è **(B)**. Consideriamo il caso in cui n sia dispari. Allora una qualunque sua potenza è dispari, e il numero successivo è pari. L'unico numero primo pari è 2, ed è possibile ottenerlo solo nel caso $n=1$. Consideriamo ora il caso in cui n sia pari. In questo caso $n+1$ è dispari, ed è dunque possibile effettuare la scomposizione $n^{n+1}+1=(n+1)\cdot Q(n)$. Se n è un numero pari diverso da 0, $n+1$ è un numero maggiore di 2 e $Q(n)$ un numero maggiore di 1, dunque $n^{n+1}+1$ non è un numero primo. (Busoni)

5. La risposta è **(A)**. Consideriamo separatamente i casi in cui Nicola abbia rispettivamente perso e vinto l'ultima partita. Nel primo caso (che avviene con probabilità 1/3) Nicola deve aver vinto le prime quattro partite, evento che ha probabilità pari a $\left(\frac{2}{3}\right)^4$. Nel secondo caso (che avviene con probabilità 2/3), Nicola deve non aver perso più di due partite tra le prime quattro: quest'ultimo evento ha probabilità complementare rispetto a quella di perdere tutte le prime quattro partite, o di vincerne esattamente una su quattro. Segue che la probabilità cercata è:
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^4-4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{160}{243}\ .$$

(Lilliu)

6. La risposta è **(D)**. Con riferimento alla figura, siano A e B estremità di sbarre contigue, V il vertice dell'arco $\widehat{AB}$, M il punto medio di AB e O il centro della circonferenza cui appartiene l'arco $\widehat{AB}$. Deve valere $OB = OV$, posto dunque $OM = x$, per il Teorema di Pitagora, deve valere:



$$OM^2 + MB^2 = OV^2 = (OM + MV)^2,$$

$$x^2 + 81 = (x + 3\sqrt{3})^2 = x^2 + 6\sqrt{3}x + 27.$$

Segue che si ha $x = 3\sqrt{3}$, dunque $OM = MV$, $OB = 2 \cdot OM$, e l'angolo $\widehat{AOB}$ ha ampiezza pari a $\frac{2\pi}{3}$. L'arco $\widehat{AB}$ ha dunque lunghezza pari a:

$$\frac{2\pi}{3} \cdot OB = 4\pi\sqrt{3}.$$

(Mattei)

7. La risposta è **(B)**. Osserviamo innanzitutto che il polinomio del testo si può scrivere come $(1+2x+2x^2+x^3)+(x^3+2x^4+2x^5+x^6) = (1+2x+2x^2+x^3)+x^3(1+2x+2x^2+x^3) = (1+x^3)(1+2x+2x^2+x^3)$. Riconoscendo poi che si può ulteriormente scrivere $1+2x+2x^2+x^3 = (1+x+x^2)+(x+x^2+x^3) = (1+x)(1+x+x^2)$, il problema si riduce a risolvere l'equazione $(x^3+1)(x+1)(1+x+x^2) = 0$. Dato che un prodotto è nullo quando lo è uno dei fattori, le soluzioni sono quelle dell'equazione $x^3 = -1$, ovvero $x = -1$, quelle di $x + 1 = 0$, ovvero ancora -1, e quelle di $1 + x + x^2 = 0$, che non ha soluzioni, dato che $1 + x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ è sempre positivo. Si conclude quindi che la risposta è 1: l'unica soluzione reale dell'equazione proposta è $x = -1$. (Lombardo)

8. La risposta è **(A)**. Chiamiamo, come nel testo, *abcdefghij* le 10 cifre del numero.
Per i numeri della forma richiesta, fissare le prime 5 cifre a, b, c, d, e determina univocamente tutto il numero per la condizione imposta (dato che possiamo ricavare $f = 9 - e, g = 9 - d, ...$).
D'altro canto, se tra le prime cinque cifre comparissero due cifre uguali, o due cifre che sommano a nove, avremmo un numero che non rispetta le condizioni, perché da una parte si è richiesto che le cifre siano tutte diverse, e dall'altra, se comparissero due cifre con somma nove tra le prime cinque, esse comparirebbero anche - nell'ordine opposto - tra le ultime 5, mentre vogliamo che siano tutte diverse.
È quindi sufficiente contare i numeri di 5 cifre (le prime 5), con a, b, c, d, e tutte diverse e tali che nessuna coppia abbia come somma 9.
Dimenticandoci per ora del fatto che un numero non deve iniziare per 0, vediamo che a può essere scelta in 10 modi, b in 8 modi (tutte le cifre, tranne a, già usata, e 9-a), c in 6 modi (tutte le cifre sono possibili, tranne a, b e $9 - a, 9 - b$), d in 4 ed e in 2 modi possibili.
Da questi dobbiamo però togliere i numeri che iniziano con la cifra zero, che sono (dato che $a = 0$, a questo punto, è fissata) $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ per lo stesso ragionamento di sopra (8 scelte per la cifra b, 6 per c, 4 per d e 2 per e).
La risposta al problema è quindi $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = (10 - 1) \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$.(Lombardo)

9. La risposta è **(B)**. Sia f la strada dove si trova Eva ed s quella dove si trovano i lampioni. Consideriamo la circonferenza passante per P, Q, E, che esiste in quanto P, Q appartengono a s mentre E non vi appartiene se no l'angolo $P\hat{E}Q$ sarebbe 0, e supponiamo per assurdo essa non sia tangente a f. Allora esiste il punto E' di ulteriore intersezione di tale circonferenza con f e sia E'' un punto dell'arco EE' non contenente P e Q, si ha $P\hat{E}Q = P\hat{E}''Q$ poiché insistono sullo stesso arco PQ; sia D l'intersezione di f e PE'', allora $P\hat{D}Q > P\hat{E}''Q = P\hat{E}Q$ in quanto angolo esterno del triangolo PDE'' non adiacente all'angolo in E''. Allora il punto E non poteva dare l'angolo massimo, e quindi la circonferenza per P, Q, E deve necessariamente tangere f in E. Ma allora per il teorema della tangente e della secante $LE^2 = LP \cdot LQ$, quindi $LE = \sqrt{40 \cdot 90} = 60$. (Kuzmin)

10. La risposta è **(E)**. Si ha $x^6 - 16x^4 + 16x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 - 15x^2 + 1)$ (tutte le radici sono reali), se dunque z è una radice diversa da ± 1, si ha $z^4 = 15z^2 - 1$, $z^6 = 15z^4 - z^2 = 224z^2 - 15$. Dette $z_1, \ldots, z_4$ queste ultime radici, si ha:

$$\sum_{j=1}^{4} z_j = 0, \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} z_i z_j = -15,$$

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^2 = \left(\sum_{j=1}^{4} z_j\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 4} z_i z_j = 30,$$

$$\sum_{i=1}^{4} z_i^6 = 224\sum_{i=1}^{4} z_i^2 - 60 = 6660,$$

reintroducendo ora nel conteggio le radici ± 1 abbiamo che la risposta corretta è 6662. (D'Aurizio)

11. La risposta è **(C)**. Innanzitutto notiamo che un numero ha esattamente 2011 divisori positivi se e solo se è della forma p^{2010} con p primo. Dobbiamo quindi risolvere $x^2 - y^2 = 2011^{2010}$. Imponendo che $x + y = p^\alpha$ e che $x - y = p^\beta$, con $\alpha + \beta = 2010$, si ottiene che $x = \frac{p^\alpha + p^\beta}{2}$, che $y = \frac{p^\alpha - p^\beta}{2}$ e quindi che $\alpha > \beta$ dato che y deve essere positivo. L'equazione $\alpha + \beta = 2010$ con $\alpha > \beta$ ha esattamente 1005 soluzioni. Dato che x ed y sono univocamente determinati da α e da β ne segue che anche le soluzioni dell'equazione iniziale sono esattamente 1005. (Di Trani)

12. La risposta è **(A)**. Basta osservare che se la sequenza ha più di 18 elementi allora la quantità:

$$X = (x_1 + \ldots + x_7) + (x_2 + \ldots + x_8) + \ldots + (x_{13} + \ldots + x_{19})$$

è sia strettamente maggiore di zero che strettamente minore di zero, infatti: è strettamente maggiore di zero per la condizione (i), mentre è minore di zero dato che, a patto di riarrangiare i termini della somma destra, si ha che:

$$X = (x_1 + \ldots + x_{13}) + (x_2 + \ldots + x_{14}) + \ldots + (x_7 + \ldots + x_{19})$$

che per (ii) è una quantità strettamente minore di zero. Dunque la risposta non può che essere la **(A)**. (Alfieri)

13. La risposta è **4**. A meno di isometrie è possibile determinare un triangolo ottusangolo, un triangolo rettangolo e due diversi triangoli equilateri. (Busoni)

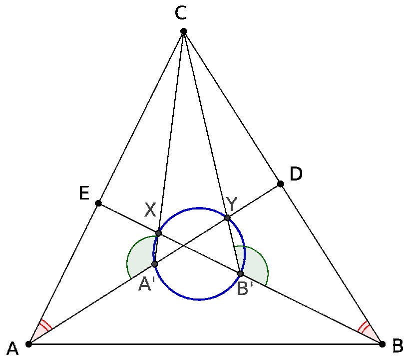
14. La risposta è **4**. L'equazione proposta è equivalente a:

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 7) = 0,$$

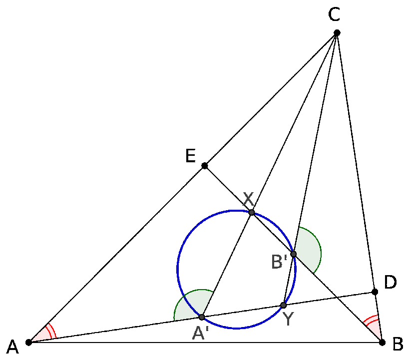
le cui soluzioni sono date dalle coppie (x, y) di interi che realizzano $x^2 + y^2 = 1$ oppure $x^2 + y^2 = 7$. L'ultima equazione, tuttavia, è impossibile, dato che un intero che sia somma di due quadrati non può avere resto 3 nella divisione per 4. Segue che tutte e sole le soluzioni sono $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. (Alfieri)

15. Sia $r(k)$ il resto di 3^k nella divisione per 20. Al fine di provare la tesi, è sufficiente mostrare che per ogni numero naturale k si ha $r(k) < 10$. È evidente che $3 \cdot r(k)$ ed $r(k+1)$ hanno lo stesso resto nella divisione per 20: si ha perciò $r(0) = 1, r(1) = 3, r(2) = 9, r(3) = 7, r(4) = r(0) = 1, r(5) = r(1) = 3, \ldots$, e la successione degli $r(k)$ risulta periodica di periodo 4. Segue che la condizione $r(k) < 10$ è verificata da ogni numero naturale k in quanto è verificata dai primi 4, e la tesi è provata. (D'Aurizio)
Soluzione alternativa:
La cifra delle unità di un numero della forma 3^k appartiene necessariamente all'insieme $\{1, 3, 7, 9\}$, in quanto un numero siffatto è dispari e non divisibile per 5. Procediamo allora per induzione su k: la tesi è vera nel caso $k = 0$; posto che la cifra delle decine di 3^k sia y, la cifra delle decine di 3^{k+1} coincide con la cifra delle unità di $3y$ o di $3y + 2$, dunque è pari per ipotesi induttiva.

16. I triangoli ADC e BEC sono simili in quanto triangoli rettangoli con il medesimo angolo in C: segue che anche i triangoli $BB'C$ e $AA'C$ risultano simili, e che, in particolare, vale $\widehat{BB'C} = \widehat{CA'A}$. Vi sono ora due casi: o il quadrilatero $A'XB'Y$ è intrecciato, o non lo è.



Nel primo caso, A' e B' vedono il segmento XY sotto lo stesso angolo.



Nel secondo caso, il quadrilatero $A'XB'Y$ ha due angoli opposti supplementari. In entrambi i casi, quanto provato è sufficiente a stabilire la ciclicità del quadrilatero $A'XB'Y$, ossia l'appartenenza dei vertici A', X, B', Y ad una medesima circonferenza. (Giorgieri)

17. Consideriamo il tratto dalla stazione n-esima alla $n+1$-esima. In questo tratto nella carrozza in questione ci sono tutti i passeggeri saliti in una delle n stazioni dalla prima all'n-esima e diretti verso una delle n stazioni dalla $n+1$-esima alla $2n$-esima. Il totale dei passeggeri presenti in quel momento in quella carrozza è allora il prodotto del numero delle stazioni precedenti per il numero delle stazioni successive, ossia n^2, che è allora il minimo numero di posti che devono essere disponibili.

    Inoltre, n^2 posti sono anche sufficienti. Piazziamo infatti le prenotazioni nel seguente modo:

    - $2n-1$ posti occupati per tutto il percorso del treno, di cui 1 occupato dal passegero che viaggia dalla prima alla $2n$-esima stazione e gli altri $2n-2$, per ogni intero k tale che $1 < k < 2n$, occupati prima dal passeggero che viaggia dalla prima alla k-esima stazione e poi dal passeggero che viaggia dalla k-esima alla $2n$-esima stazione.
    - $2n-3$ posti occupati dalla seconda alla $2n-1$-esima stazione, di cui 1 occupato dal passegero che viaggia dalla seconda alla $2n-1$-esima stazione e gli altri $2n-4$, per ogni intero k tale che $2 < k < 2n-2$, occupati prima dal passeggero che viaggia dalla seconda alla k-esima stazione e poi dal passeggero che viaggia dalla k-esima alla $2n-1$-esima stazione.
    - ...
    - 3 posti occupati dalla $n-1$ esima alla $n+2$ esima stazione, di cui uno per il viaggio tra le stazioni $n-1$ e $n+2$, uno per il viaggio tra le stazioni $n-1$ e n e poi tra la n e la $n+2$ e l'ultimo prima per il viaggio tra la $n-1$ e la $n+1$ e dopo per il viaggio tra la $n+1$ e la $n+2$.
    - 1 posto per il viaggio tra la stazione n e la $n+1$

    In questo modo i posti necessari sono dati dalla somma di tutti gli interi dispari da 1 a $2n-1$, e sono n^2 per una nota identità. Siano poi i, j interi tali che $1 \leq i < j \leq 2n$. Allora:

    - Se $i < j \leq n$ il passeggero che viaggia tra la i-esima e la j-esima stazione avrà uno dei $2n-2i+1$ posti occupati per il tragitto tra la stazione i-esima e la $2n+1-i$-esima, e simmetricamente se $n+1 \leq i < j$.

- Se $i \leq n$ e $n+1 \leq j$, e $n-i > j-(n+1)$, il passeggero che viaggia tra la i-esima e la j-esima stazione avrà uno dei $2n-2i+1$ posti occupati per il tragitto tra la stazione i-esima e la $2n+1-i$-esima, e simmetricamente se $n-i < j-(n+1)$. Se poi $n-i = j-(n+1)$ il tragitto si svolgerà per intero su uno dei posti occupati tra le stazioni i-esima e la $2n+1-i$-esima. Non ci sono altri casi per la scelta di i e j, quindi tutti i posti necessari sono stati assegnati ai rispettivi passeggeri.

Soluzione alternativa: Per quella parte dell'esercizio in cui si chiede di descrivere uno schema di assegnazione dei posti, è possibile usare un procedimento induttivo, che genera sostanzialmente la stessa disposizione descritta prima sinteticamente.

- Per $n = 1$ è chiaramente sufficiente $1 = 1^2$ posto per andare dalla prima alla seconda stazione.
- Se $n > 1$, per i passeggeri che viaggiano tra le stazioni i-esima e la j-esima con $1 < i < j < 2n$ sono sufficienti $(n-1)^2$ posti; possiamo infatti applicare l'ipotesi induttiva al tragitto dalla seconda alla $2n-1$-esima stazione, che contiene $2(n-1)$ stazioni. Inoltre si aggiungono 1 passeggero che viaggia tra la prima e la $2n$-esima stazione, che richiederà un ulteriore posto, $2n-2$ passeggeri che viaggiano tra la prima e la k-esima stazione, con $1 < k < 2n$ e altri $2n-2$ che viaggiano tra la h-esima e la $2n-2$-esima stazione, per $1 < h < 2n$; questi ultimi potranno essere sistemati in $2n-2$ posti facendone occupare uno, per ogni k intero tale che $1 < k < 2n$, prima dal passeggero che viaggia tra la prima e la k-esima stazione e poi dal passeggero che viaggia tra la k-esima stazione fino alla fine. Basterà allora aggiungere $2n-1$ posti, ma $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$

Soluzione alternativa: Sempre relativamente alla seconda parte dell'esercizio, non è in realtà necessario nessuno schema specifico di assegnazione dei posti. Segue la dimostrazione di questo fatto.

Dimostriamo che, se ci sono almeno n^2 posti totali disponibili, ad una qualsiasi stazione che non sia ovviamente quella finale, indipendentemente da come si siedono i passeggeri entrando nel treno ed occupando poi il posto per tutta la durata del rispettivo tragitto, i nuovi passeggeri entranti troveranno sempre un posto libero per sè.

Alla k-esima stazione, con $1 \leq k < 2n$, al momento di entrata nel treno dei nuovi passeggeri, ci sono ancora nella carrozza tutti i passeggeri che viaggiano partendo da una delle stazioni precedenti la k-esima diretti verso una delle stazioni ad essa successive, e sono quindi $(k-1)(2n-k)$. Rimangono diponibili $n^2 - (k-1)(2n-k)$ posti, che devono bastare per i $2n-k$ passeggeri che stanno entrando alla k-esima stazione. Deve quindi valere $n^2 - (k-1)(2n-k) \geq 2n-k$, ossia $n^2 \geq (k-1)(2n-k) + 2n - k = k(2n-k) = (n-(n-k))(n+(n-k)) = n^2 - (n-k)^2$, e così effettivamente è, visto che $(n-k)^2 \geq 0$ essendo un quadrato. (Kuzmin)